



Erwartungswert: Definition

1

Definition 5.1

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ mit endlich vielen Werten x_1, \dots, x_n .

Dann heißt die Zahl

$$E(X) := \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

der *Erwartungswert* von X (bezüglich P).



Erwartungswert: Spezialfall

2

Anwendungsbox 5.1

Im Spezialfall, in dem alle Werte von X mit gleicher Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i) = 1/n$ auftreten (s. Def. 5.1), vereinfacht sich die Gleichung zu

$$E(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Beispiel: Einmaliger Münzwurf

3

Einmaliger Würfelwurf mit der Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$, wobei ω_i das Ergebnis bezeichnet, dass der Würfel i Augen zeigt. Weiter sei \mathfrak{A} die Potenzmenge von Ω und $P: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ das durch

$$P(\{\omega\}) := \frac{1}{6}, \quad \text{für alle } \omega \in \Omega,$$

definierte W-Maß.

Die reelle Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ist durch

$$X(\omega_i) := i, \quad \text{für alle } \omega_i \in \Omega,$$

definiert. X gibt die *Augenzahl* an, die der Würfel nach dem Werfen zeigt.

Dann ist X eine Zufallsvariable auf $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ und es gilt für den Erwartungswert $E(X)$ von X :

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = (1 + 2 + \dots + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3.5.$$



Beispiel: Erwartungswert einer Indikatorvariablen

4

Sei Y eine Zufallsvariable, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann

(z. B. für ungerade vs. gerade Augenzahl beim Würfeln). Dann gilt

$$E(Y) = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) = P(Y=1).$$

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, ist also gleich der Wahrscheinlichkeit $P(Y=1)$, dass Y den Wert 1 annimmt.



Erwartungswert: Rechenregeln

5

Sind X und Y numerische Zufallsvariablen auf $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ mit endlichen Erwartungswerten sowie α und $\beta \in \mathbb{R}$, dann gelten:

(i) $E(\alpha) = \alpha$

(ii) $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

(iii) $E(\alpha \cdot X + \beta \cdot Y) = \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot E(Y)$



Varianz und Standardabweichung: Definition

6

Definition 5.2

Sei X eine numerische Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ mit endlichem Erwartungswert. Dann heißt die Zahl

$$\text{Var}(X) := E [(X - E(X))^2]$$

die *Varianz* von X (bezüglich P) und ihre positive Quadratwurzel

$$\text{Std}(X) = +\sqrt{\text{Var}(X)}$$

die *Streuung* oder die *Standardabweichung* von X (bezüglich P)



Varianz: Rechenregeln

7

$$(i) \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$(ii) \quad \text{Var}(X) = 0, \text{ falls } X = \alpha$$

Sind X und Y numerische Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit endlichen Erwartungswerten sowie α und $\beta \in \mathbb{R}$, dann gelten:

$$(iii) \quad \text{Var}(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot \text{Var}(X)$$

$$(iv) \quad \text{Var}(\alpha + X) = \text{Var}(X)$$

$$(v) \quad \text{Var}(\alpha \cdot X + \beta \cdot Y) = \alpha^2 \cdot \text{Var}(X) + \beta^2 \cdot \text{Var}(Y) + 2\alpha\beta \cdot \text{Cov}(X, Y)$$



Varianz einer Differenzvariablen

8

Für die Differenz $X_1 - X_2$ *unkorrelierter* numerische Zufallsvariablen folgt aus Regel (v) (mit $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = -1$):

$$\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2), \text{ falls } \text{Cov}(X_1, X_2) = 0.$$

Die Varianz einer Differenzvariablen ist also gleich der *Summe* der Varianzen, *falls die beiden Variablen unkorreliert* sind.

Andernfalls gilt:

$$\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) - 2 \text{Cov}(X_1, X_2).$$



Kovarianz: Definition

9

Definition 5.3

Seien X und Y numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$. Dann heißt die Zahl

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

die *Kovarianz* von X und Y (bezüglich P).



Korrelation als Erwartungswert des Produkts z -transformierter Variablen

10

Betrachten wir dagegen den Erwartungswert

$$\text{Kor}(X, Y) := E\left[\frac{X - E(X)}{\text{Std}(X)} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\text{Std}(Y)}\right]$$

des Produkts der *standardisierten* Abweichungsvariablen $[X - E(X)] / \text{Std}(X)$ und $[Y - E(Y)] / \text{Std}(Y)$, wobei wir natürlich $\text{Std}(Y)$ und $\text{Std}(X) > 0$ voraussetzen, so haben wir eine normierte Kenngröße für die Stärke der betrachteten Abhängigkeit zwischen zwei numerischen Zufallsvariablen X und Y , die nicht von den Varianzen (bzw. den Standardabweichungen) der beiden Variablen abhängt. Die durch diese Gleichung definierte Kenngröße heißt die *Korrelation* von X und Y . Ist eine oder sind gar beide Standardabweichungen gleich null, definieren wir $\text{Kor}(X, Y) := 0$.



Korrelation: Definition

11

Definition 5.4

Seien X und Y numerische Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ mit endlichen Erwartungswerten und positiven Standardabweichungen. Dann heißt die Zahl

$$Kor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{Std(X) \cdot Std(Y)}$$

die *Korrelation* von X und Y (bezüglich P). Ist eine der Standardabweichungen gleich null, so definieren wir $Kor(X, Y) = 0$.



Lineare Quasi-Regression

12

Kovarianz und Korrelation charakterisieren nur die Stärke eines bestimmten Aspekts der stochastischen Abhängigkeit zwischen zwei numerischen Zufallsvariablen. Dabei geht es darum, inwieweit eine *lineare Abhängigkeit* zwischen diesen beiden Variablen besteht, d. h. eine Abhängigkeit, die sich, bis auf eine *Fehler-* oder *Residualvariable* \mathbf{n} , durch eine Gerade, d. h. durch eine lineare Funktion von X , beschreiben lässt:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \mathbf{n}$$

Die beiden Koeffizienten α_0 und α_1 sind dabei eindeutig bestimmt, wenn für die Residualvariable \mathbf{n} gelten:

$$Cov(X, \mathbf{n}) = 0 \quad \text{und} \quad E(\mathbf{n}) = 0$$



Kleinst-Quadrat-Kriterium

13

Eine alternative, mit diesen Gleichungen völlig äquivalente Definition ist, als lineare Quasi-Regression von Y auf X diejenige lineare Funktion von X zu definieren, die folgende Funktion der reellen Zahlen a_0 und a_1 minimiert:

$$LS(a_0, a_1) = E[(Y - (a_0 + a_1 \cdot X))^2]$$



Kovarianzen und Korrelationen: Rechenregeln I

14

Sind X und Y numerische Zufallsvariablen auf $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ mit endlichen Erwartungswerten sowie α und $\beta \in \mathbb{R}$, dann gelten:

- (i) $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$
- (ii) $Cov(X, Y) = 0$, falls $X = \alpha$
- (iii) $Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha \beta Cov(X, Y)$
- (iv) $Cov(\alpha + X, \beta + Y) = Cov(X, Y)$



Kovarianzen : Rechenregeln II

15

Sind X_1, X_2, Y_1 und Y_2 numerische Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit endlichen Erwartungswerten und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, dann gelten:

$$(v) \quad \text{Cov}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2) = \alpha_1 \beta_1 \text{Cov}(X_1, Y_1) \\ + \alpha_1 \beta_2 \text{Cov}(X_1, Y_2) + \alpha_2 \beta_1 \text{Cov}(X_2, Y_1) + \alpha_2 \beta_2 \text{Cov}(X_2, Y_2)$$



Korrelationen: Rechenregeln I

16

- $Kor(X, Y) = 0$, falls $X = \alpha$
- $Kor(\alpha X, \beta Y) = Kor(X, Y)$
- $Kor(\alpha + X, \beta + Y) = Kor(X, Y)$



Numerisches Beispiel zur Berechnung einer Kovarianz

17

X	Y	$P(X=x, Y=y)$	$X - E(X)$	$Y - E(Y)$	$[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]$
0	0	5/40	-32/40	-15/40	48/160
0	1	3/40	-32/40	25/40	-80/160
1	0	20/40	8/40	-15/40	-12/160
1	1	12/40	8/40	25/40	20/160

$$E(X) = 0 \cdot 8/40 + 1 \cdot 32/40 = 32/40 \quad E(Y) = 0 \cdot 25/40 + 1 \cdot 15/40 = 15/40.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]]$$

$$= (48/160) \cdot 5/40 + (-80/160) \cdot 3/40 + (-12/160) \cdot 20/40 + (20/160) \cdot 12/40 = 0$$

Die beiden Variablen X und Y haben also in diesem Beispiel die Kovarianz 0, d. h. sie sind unkorreliert.



Erwartungswert: Allgemeine Definition

18

Definition 5.5

Sei X eine numerische Zufallsvariable auf dem W -Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ und P^X ihre Verteilung. $E(X)$ heißt der *Erwartungswert* von X (hinsichtlich P), wenn

$$E(X) := \int x P^X(dx).$$